Grado en Matemáticas

Examen de Análisis Funcional - Evaluación Única Final

1. Dada una sucesión acotada, $y \in \ell_\infty$, se define un operador lineal $T : \ell_p \to \ell_p$, donde $1 \leqslant p \leqslant \infty$, por
$$[Tx](n) = y(n)x(n) \quad (x \in \ell_p, n \in \mathbb{N})$$
a) Estudia la continuidad de T y calcula su norma. ¿Hay algún valor de p para el que pueda asegurarse que T alcanza su norma?

b) Prueba que T es un isomorfismo topológico si, y sólo si, existe un número $r > 0$ tal que $|y(n)| \geqslant r$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Prueba que el dual de c_0 es isométricamente isomorfo a ℓ_1.

3. Sea X un espacio normado y M un subespacio cerrado de X. Prueba que si M y X/M son espacios de Banach, entonces X es un espacio de Banach.

4. Sea $M = \{x \in \ell_2 : x(1) = x(2) = x(3)\}$. Calcula la proyección ortogonal de ℓ_2 sobre M.

5. Sea X un espacio normado y $x \in X$ con $\|x\| = 1$. Prueba que existe un subespacio cerrado $M \subset X$ tal que $X = M \oplus \mathbb{K}x$ y $\operatorname{dist}(x, M) = 1$.

6. Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ una aplicación lineal y continua. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) T es inyectiva y $T(X)$ es cerrado en Y.

b) Existe $m > 0$ tal que $\|T(x)\| \geqslant m\|x\|$ para todo $x \in X$.

7. Explica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas. Cuando sean ciertas, indica el resultado de teoría que lo justifica o proporciona una prueba, y, cuando sean falsas, indica un contraejemplo.

a) Si X, Y son espacios de Banach y la dimensión de Y es finita, entonces todo operador lineal de X en Y cuyo núcleo sea cerrado es continuo.

b) Todo subespacio cerrado propio de un espacio normado es igual a la intersección de los hiperplanos cerrados que lo contienen.

c) Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$. Supongamos que para cada $x \in X$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \ker(T^n)$. Entonces existe algún $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^m = 0$.

d) Sean $\| . \|$ y $||| . |||$ dos normas completas no equivalentes en un espacio vectorial X. Entonces la aplicación identidad $I_X : (X, \| . \|) \to (X, ||| . |||)$ no es continua.

e) ¿Puede definirse alguna norma completa en el espacio vectorial de las funciones polinómicas?

f) Sea X un espacio normado de dimensión infinita. ¿Puede existir alguna norma en el dual X^* cuya topología sea la topología débil-* de X^*?

g) Todo conjunto w-compacto en un espacio normado está acotado.

8. Responde a uno de los siguientes temas.

   a) Teorema de categoría de Baire. Teorema de Banach-Steinhaus. Alguna aplicación.

   b) Teoremas de la aplicación abierta y de la gráfica cerrada.

Condiciones para aprobar. Responder correctamente la pregunta de teoría. Hacer correctamente al menos tres de los ejercicios 1-6. Responder correctamente al menos a tres de las cuestiones del ejercicio 7

Granada, 23 de enero de 2019